BIEN SE PRÉPARER À LA RENTRÉE EN CLASSES PRÉPARATOIRES

On ne vous le dira jamais assez, cette année, vous allez avoir du travail (et vous aimerez ça) ! L'organisation de vos révisions est donc primordiale pour aborder le plus sereinement possible votre rentrée.

Faites-en sorte de travailler régulièrement pendant ces vacances afin d'arriver début septembre avec une bonne maîtrise des fondamentaux de Terminale (Maths complémentaires ou spécialité Math – un état des lieux sera fait à la rentrée), à savoir :

- **L'étude des fonctions** : tableaux de signes (maîtrise des **trinômes**), dérivation, limites & croissances comparées (pour ceux qui les auront vues)
- **Les suites numériques** : suites géométriques et arithmétiques, calculs de sommes, raisonnement par récurrence (*pour les anciens spé Math*), convergence (connaître les différents théorèmes de convergence ou de divergence)
- Le **calcul numérique**, et oui, pas de calculatrice en prépa : maîtriser les calculs fractionnaires, les puissances, les exponentielles, les logarithmes et tout simplement les calculs élémentaires !

Note : un devoir surveillé sur l'ensemble de ces notions aura lieu **le jour de la rentrée**.

Essayez de résoudre les exercices suivants, sans vous aider trop rapidement des corrigés puis vérifier ensuite vos réponses, la qualité de votre argumentation, à l'aide de la correction.

Même si la calculatrice est interdite en prépa, n'hésitez pas à vous en servir pour vérifier vos résultats ou leurs cohérences.

Si vous vous êtes aidé de la correction, ou si vous avez commis des erreurs, reprenez le même exercice quelques jours plus tard, et n'hésitez pas à préparer des questions sur les corrigés pour la rentrée et des fiches de méthodes sur les questions classiques qui vous posent problème.

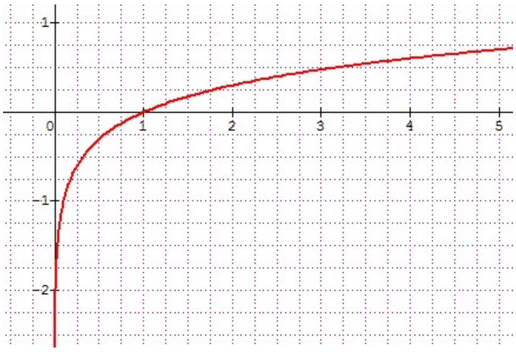
POINT IMPORTANT POUR LES REVISIONS :

Ne vous inquiétez pas, si des points sont à travailler, nous prendrons le temps de le faire ensemble et ce quel que soit votre parcours de Terminale.
Ces exercices ne doivent pas vous décourager, ne vous étonnez pas si vous rencontrez des difficultés en en abordant certains…

Et maintenons, passons à la pratique !

BREF FORMULAIRE DE TERMINALE

Fonction ln



Définie sur $]0;+\infty[$

Pour tout $a > 0$, $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$
$$\ln(a^n) = n \ln a,\ \forall n \in \mathbb{Q}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

$\ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Fonction exp

Définie sur $\mathbb{R}$

Pour tout a, b réels

$$e^{a+b} = e^a\, e^b$$
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$
$$e^{na} = (e^a)^n,\ \forall n \in \mathbb{Q}$$

Pour tout $x > 0$, $e^{\ln} = x$

$e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

■ RÈGLES SUR LES PUISSANCES (ENTIÈRES OU NON)

Sous réserve d'existence des quantités en jeu,

- Compatibilité avec le produit et le quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ et $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ et $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^0 = 1$, pour tout réel a non nul
- Pour tout réel positif x, on rappelle que $\sqrt{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{\frac{1}{2}}$

On remarquera que les fonctions puissances ont les mêmes propriétés que les fonctions exponentielles. En effet, pour tout réel x, tout réel $a > 0$, $\boldsymbol{a^x = e^{x \ln a}}$.

■ OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

- Bien connaître son tableau d'opérations ($+$; $-$; $\times$; $\div$) sur les limites
- Quatre Formes indéterminées : « $\infty - \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\infty \times 0$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever ces formes indéterminées, on dispose essentiellement :
(on (re)travaillera tout cela ensemble)

En l'infini

- La factorisation par le terme de plus haut degré pour les fonctions rationnelles
- Les résultats de croissances comparées :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

■ RÉCURRENCE (*SPÉ*)

La démonstration par récurrence consiste à :

1. <u>Énoncé</u> : énoncer clairement une proposition $P(n)$ où n est un entier naturel
2. <u>Initialisation</u> : vérifier que la propriété est vraie pour une valeur initiale n_0.
3. <u>Hérédité</u> : vérifier que, « si $P(n)$ vraie pour un rang $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie ».
4. <u>Conclusion</u> : on peut alors conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

■ SUITES GÉOMÉTRIQUES / ARITHMÉTIQUES (*SPÉ+COMP*)

Suites arithmétiques

- Une suite est arithmétique ssi la différence $u_{n+1} - u_n$ est un nombre indépendant de n ; on note r ce nombre, la raison de la suite.
- Pour tout entier p, $u_n = u_p + (n-p) \times r$

$$Somme\ finie\ de\ termes\ consécutifs = (nb\ de\ termes) \times \frac{1er\ +\ dernier}{2}$$

Suites géométriques

- Une suite est géométrique ssi le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un nombre indépendant de n ; on note q ce nombre, la raison de la suite.
- Pour tout entier p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

$$Somme\ finie\ de\ termes\ consécutifs = (1er\ terme) \times \frac{1 - q^{nb\ termes}}{1-q}$$

Rappel sur le nombre de termes :

Soient p et n deux entiers, $p \leq n$: il y a $n - p + 1$ entiers compris entre p et n (p et n inclus)

Par exemple, entre les nombres 3 et 10 (compris), il y a $10 - 3 + 1 = 8$ *entiers.*

ET LE RESTE !

Faites-vous une interro orale sur les notions qui suivent : si vous ne les connaissez plus, ajoutez-les sur la fiche…

- Trinômes : à connaitre sur le bout des doigts…
  Allure graphique suivant le signe de a, nombre de racines et valeurs de ces racines suivant les cas, tableau de signes suivant les cas
- Formules de dérivation : $u \times v$; $\frac{u}{v}$; e^u ; $\ln u$; dérivée de la composée $f(u)$ si vous l'avez vue
- Suites : théorèmes de convergence d'une suite, les deux méthodes principales pour étudier les variations d'une suite
- Définition de $\int_a^b f(x)dx$, primitives de référence *si déjà vu*
- …

EXERCICES CORRIGÉS : MISE EN JAMBE

0 – RAPPELS ÉLÉMENTAIRES (?)

EXERCICE 1.

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=(3x-2)^2-(2x-1)^2$ $\qquad$ $B=(-2x+1)^2-2(x-3)^2$

$C=e^{2x}-(e^{-x}-e^x)^2$ $\qquad$ $D=(2e^{2x}-1)^2-(e^{4x}-1)$

Exprimer sous la forme de quotient de deux entiers les nombres suivants :

$E=e^{2\ln 3}-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $F=\frac{\ln(10^n)-n\ln 2}{n\ln 5}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$G=e^{-2\ln 4}-e^{-4\ln 2}$ $\qquad$ $H=e^{-n\ln 3}+\frac{1}{3}$, pour $n\in\mathbb{N}$

Exprimer en fonction de q^n, où n est un entier les expressions suivantes :

$I=q^{2n-1}$ $\qquad$ $J=q^{n+1}-q^n$ $\qquad$ $K=\frac{q^n}{q^{1-n}}$

Ecrire sous la forme $a\times b^n$ les expressions suivantes, où n est un entier et a,b deux réels à déterminer :

$L=3^{2n+1}$ $\qquad$ $M=\frac{4}{5^n}$ $\qquad$ $N=\frac{6^{n+1}}{3^{2n}}$ $\qquad$ $P=(-1)^n\times 2^{n-1}$

EXERCICE 2.

Déterminer les limites suivantes :

$f(x)=\frac{(2x+1)^3}{2x^3}\ \ en\ \ +\infty$ $\qquad$ $g(x)=e^x-x^2\ \ en\ \ +/-\infty$

$h(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}\ \ en\ \ +/-\infty$ $\qquad$ $i(x)=\frac{5x^2+1}{x-1}\ \ en\ \ 0$

$k(x)=x^2\ln x-\ln x\ \ en\ \ 0$ $\qquad$ $l(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)\ \ en\ \ -\infty$

$m(x)=e^{x\ln x-1}\ \ en\ \ 0$ $\qquad$ $n(x)=\frac{2x^2-1}{x^2}\ \ en\ \ 0$

EXERCICE 3.

Méthodes : pour déterminer le signe d'une fonction
- Connaître les signes des fonctions de référence :
  - Fonctions affine, trinôme, exp et ln
  - Factoriser ou mettre au même dénominateur
- Résoudre directement une inéquation

Si les deux premiers points ne donnent rien, faire une étude de fonction

Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes sur le domaine I précisé :

$f(x) = \frac{3-x}{x^2-4x+3}$ sur $I = \mathbb{R} - \{1;3\}$

$g(x) = 3 - e^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{x}{x-2} - x$ sur $I = \mathbb{R} - \{2\}$

$i(x) = 3 - \ln(2x+1)$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty]$

I – EQUATIONS – INÉQUATIONS

Rappels :
On peut :
- Additionner des inégalités rangées dans le même sens
- Ajouter le même nombre à chaque membre
- Multiplier une inégalité par un nombre positif (le sens est alors conservé), ou par un nombre négatif (le sens de l'inégalité est alors inversé).

Attention
On ne peut pas :
- Diviser des inégalités, même rangées dans le même sens
- Soustraire des inégalités
- Les multiplier par un nombre dont on ne connait pas le signe

EXERCICE 4.

Déterminer le **domaine de définition** des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x}{\ln}$ $\quad h(x) = \ln(\ln x + 2)$ $\quad i(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$

$(*)\ j(x) = \ln(e^x - x)$ $\quad k(x) = \sqrt{3x - xe^x}$

EXERCICE 5.

Déterminer **le signe des fonctions** suivantes sur leur domaine I (à déterminer parfois) :

$f(x) = 3 - \frac{2-x}{3-x}$ $\quad g(x) = 2x^2 + \frac{3}{e^x+1}$ $\quad h(x) = \frac{x\ln x +}{x+2}$

$(*)\ i(x) = \int_1^x e^{t^2} dt \quad (on\ ne\ cherchera\ pas\ à\ calculer\ cette\ intégrale)$

$j_n(x) = x^{n+1} - x^n$ sur $I = \mathbb{R}^+$, où $n \in \mathbb{N}$ $\quad (*)\ k_n(x) = e^{nx} - 2$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$m(x) = \ln(2x+3) - 2$

EXERCICE 6.

Dresser le **tableau de variations** complet des fonctions suivantes sur leur domaine (à préciser en général). Justifier précisément les limites des fonctions aux bornes de leurs domaines.

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$ $\quad g(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$ sur $\mathbb{R}_*^+$ $\quad h(x) = \frac{e^x}{x}$

$i(x) = xe^x - e^x + 1$ sur $\mathbb{R}^+$ $\quad k(x) = x\ln x$

II – SUITES NUMÉRIQUES

Méthodes : pour étudier la nature d'une suite (convergence, divergence)

- On peut utiliser un théorème de majoration, de minoration ou le théorème des gendarmes
- On peut utiliser le **théorème de convergence monotone** (*vu en spé*)
- On peut utiliser les limites de référence si la suite est explicite en fonction de n

Méthodes : pour déterminer les variations d'une suite

- On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- On peut faire un raisonnement par récurrence avec une proposition du type $P(n)$: « $u_{n+1} \leq u_n$ » ou $P(n)$: « $u_{n+1} \geq u_n$ »

EXERCICE 7. (POUR TOUS)

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - n \\ u_0 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{n+1} = (n+1)v_n \\ v_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{n+2} = w_{n+1} - w_n \\ w_0 = w_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{n+2} = -n\, t_n \\ t_0 = 0,\ \ t_1 = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 8. (SI RECURRENCE DÉJÀ VUE)

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$.

1a. Conjecturer les variations de la suite.
1b. Prouver votre résultat par récurrence.
2. Démontrer que la suite est majorée par 6.
3. Prouver qu'elle converge et déterminer sa limite.
4. À l'aide d'un algorithme, déterminer le rang N à partir duquel $|u_n - \frac{3}{2}| \leq 0{,}001$.

EXERCICE 9. (POUR TOUS)

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 0.8u_n + 1$ et $u_0 = 6$.

1. Prouver que la suite $v_n = u_n - 5$ est géométrique.
2. En déduire u_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de u ?
4. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$.

EXERCICE 10. (SI RECURRENCE DÉJÀ VUE)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
Étudier le sens de variation de f.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
b. Montrer que, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.
c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
d. Prouver qu'elle converge.

EXERCICE 11. (Q1 POUR SPE, LE RESTE POUR TOUS)

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+1}$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Pour tout entier n on pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$.
3a. Calculer v_0 puis v_1.
3b. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison.

4a. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
4b. Pour tout entier n on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2}{u_k}$: exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE 12. (POUR TOUS)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2 \end{cases}$. On pose $w_n = u_n - n - \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et w_0, w_1, w_2.
1b. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher le terme u_N de la suite, N étant saisi par l'utilisateur :

```
Demander un entier N
Initialiser U à 1
De K =1 à K = N Faire
        Affecter … à la variable U
Fin Boucle
Afficher U
```

1c. Un élève décide de modifier l'algorithme précédente en faisant une boucle de K = 0 à K = N-1. Comment sera alors modifier l'affectation de U suivante ?

2a. Prouver que w est géométrique
2b. Exprimer w_n en fonction de n.
2c. En déduire u_n en fonction de n.

3. Préciser la nature des suites w et u.

4a. Exprimer $\sum_{k=0}^{k=n} w_k$ en fonction de n.
4b. En déduire $\sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n.

III – EN VRAC

EXERCICE 13.

Sachant que $e \approx 2.7$, prouver que $\ln 2 - 0.5 > 0$, sans calculatrice bien sûr…

EXERCICE 14.

Soit F la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & pour\ \ x < 0 \\ e^{-x} & pour\ \ x \geq 0 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement F.
2. On pose $G(x) = F(2 - x)$, pour tout réel x.
2a. Déterminer une expression de $G(x)$ en fonction de x
2b. Représenter graphiquement G.

EXERCICE 15.

Soit F la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} x^2 & pour\ \ x < 0 \\ e^{x} & pour\ \ x \geq 0 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement F.
2. On pose $G(x) = F(2x + 1)$, pour tout réel x.
Déterminer une expression de $G(x)$ en fonction de x

EXERCICE 16.

On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = x \ln x$.
1. Déterminer la limite de f en 0.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]0; 1]$.
3. En déduire un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0; 1]$.
4. Prouver que pour tout entier naturel n, on a $|(x \ln x)^n| \leq \frac{1}{e^n}$.

EXERCICE 17.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 2^n \geq n + 1$.

ELÉMENTS DE CORRECTION

- Passez au moins quelques minutes sur une question avant de consulter le corrigé.
- Prenez-le temps de comprendre chaque étape de calcul ou de raisonnement, en notant les hypothèses utilisées.
- **Comprenez vos erreurs**, afin de ne pas les reproduire.
- Faites-vous éventuellement des **Fiches Méthodes** à l'aide du corrigé (*ou comment répondre à une question classique*), voire même des **Fiches d'erreurs**, lorsque vous voyez que vous reproduisez la même erreur ou « maladresse » de calcul.

CORRIGÉ EXO 1

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=(3x-2)^2-(2x-1)^2=(9x^2-12x+4)-(4x^2-4x+1)=5x^2-8x+3$
$B=(-2x+1)^2-2(x-3)^2=(4x^2-4x+1)-2(x^2-6x+9)=2x^2+8x-17$
$C=e^{2x}-(e^{-x}-e^{x})^2=e^{2x}-(e^{-2x}-2+e^{2x})=-e^{-2x}+2$
$D=(2e^{2x}-1)^2-(e^{4x}-1)=(4e^{4x}-4e^{2x}+1)-e^{4x}+1=3e^{4x}-4e^{2x}+2$
$E=e^{2\ln 3}-\frac{1}{3}=e^{\ln(3^2)}-\frac{1}{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$
$F=\frac{\ln(10^n)-n\ln 2}{n\ln 5}=\frac{n\ln 10-n\ln 2}{n\ln 5}=\frac{n\ln\left(\frac{10}{2}\right)}{n\ln 5}=\frac{\ln 5}{\ln}=1$
$G=e^{-2\ln 4}-e^{-4\ln 2}=e^{\ln(4^{-2})}-e^{\ln(2^{-4})}=4^{-2}-2^{-4}=\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^4}=0$
$H=e^{-n\ln 3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{e^{n\ln 3}}+\frac{1}{3}=\frac{1}{e^{\ln(3^n)}}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3}\times\frac{3^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{1+3^{n-1}}{3^n}$
$I=q^{2n-1}=q^{2n}\times q^{-1}=(q^n)^2\times\frac{1}{q}=\frac{(q^n)^2}{q}$
$J=q^{n+1}-q^n=q^n\times q-q^n=q^n(q-1)$
$K=\frac{q^n}{q^{1-n}}=q^{n-(1-n)}=q^{2n-1}=I=\frac{(q^n)^2}{q}$

$L=3^{2n+1}=3\times 3^{2n}=3\times 9^n$ — $a=3$ et $b=9$
$M=\frac{4}{5^n}=4\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ — $a=4$ et $b=\frac{1}{5}$
$N=\frac{6^{n+1}}{3^{2n}}=\frac{6\times 6^n}{9^n}=6\times\left(\frac{6}{9}\right)^n$ — $a=6$ et $b=\frac{2}{3}$
$P=(-1)^n\times 2^{n-1}=(-1)^n\times 2^n\times 2^{-1}=\frac{1}{2}\times(-2)^n$ — $a=\frac{1}{2}$ et $b=-2$

CORRIGÉ EXO 2

Déterminer les limites suivantes :

■ $f(x)=\frac{(2x+1)^3}{2x^3}$ $en\ +\infty$: fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) en **l'infini**, $f(x)$ a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré, càd $\frac{(2x)^3}{2x^3}=\frac{8x^3}{2x^3}=4$: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$

■ $g(x)=e^x-x^2$ $en\ +\infty$: $g(x)=e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$ or par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ donc par produit, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Vous devez maitriser les résultats de croissances comparées.

■ $g(x)=e^x-x^2$ $en\ -\infty$: pas de croissances comparées ici, car il n'y pas de forme indéterminée. En effet, $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ donc par somme de limites, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

■ $h(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}$ $\;en\;\; +/-\infty$:

- En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\frac{3}{2}$
- En $+\infty$: $h(x)=\frac{e^x(1-3e^{-x})}{e^x(1+2e^{-x})}=\frac{1-3e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ et donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

Factoriser par le terme dominant s'avérera souvent une bonne stratégie pour les FI du type $\frac{\infty}{\infty}$

■ $i(x)=\frac{5x^2+1}{x-1}$ $\;en\;\; 0$: calcul direct ! par quotient, $\lim\limits_{x\to0} i(x)=\frac{0+1}{0-1}=-1$

■ $k(x)=x^2\ln x-\ln x$ $\;en\;\; 0$: par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln x=0$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to0} k(x)=+\infty$

■ $l(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)$ $\;en\;\; -\infty$: la fonction rationnelle $\frac{x^2+1}{2x^2-1}$ a même limite en l'infini que $\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$. Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} l(x)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

■ $m(x)=e^{x\ln x-}$ $\;en\; 0$: par croissance comparée, , $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$, donc par composée $\lim\limits_{x\to0} m(x)=e^{-1}$

■ $n(x)=\frac{2x^2-1}{x^2}$ $\;en\;\; 0$: on a une limite du type « $-\frac{1}{0}$ ». En terme de limites, on sait diviser par 0, mais on a besoin de savoir si on divise par 0^+ ou 0^- : comme $\lim\limits_{x\to0} x^2=0^+$, par quotient de limites on a $\lim\limits_{x\to0} n(x)=-\infty$

CORRIGÉ EXO 3

■ $f(x)=\frac{3-x}{x^2-4x+3}$ $\;\text{sur}\;\; I=\mathbb{R}-\{1;3\}$: nous pouvons faire le tableau de signe quasiment directement.

- Le numérateur est une fonction affine, pas de pb
- Le dénominateur est un trinôme de racines 1 et 3 : il est donc du signe de -1 entre ses racines.

Remarque : le trinôme admet 1 et 3 comme racines, il se factorise donc sous la forme $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1;3\}$, on a donc

$$f(x)=\frac{-(x-3)}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{x-1}$$

■ $g(x)=3-e^{-2x}$ $\;\text{sur}\;\; I=\mathbb{R}$: résolvons directement une inéquation.
$3-e^{-2x}\le0 \Leftrightarrow 3\le e^{-2x}\Leftrightarrow \ln 3\le -2x \Leftrightarrow -\frac{\ln 3}{2}\ge x$: on obtient donc

x	-∞		$-\frac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

■ $h(x)=\frac{x}{x-2}-x$ $\;\text{sur}\;\; I=\mathbb{R}-\{2\}$: déjà mettons au même dénominateur, $h(x)=\frac{x-x(x-2)}{x-2}=\frac{-x^2+3x}{x-2}=\frac{x(-x+3)}{x-2}$.

Le numérateur est un trinôme de racines 0 et 3 : il est du signe de $-(-1)=1$ entre ses racines. On a ainsi,

x	-∞		0		2		3		$+\infty$
$x-2$		-	|	-	0	+	|	+	
$-x^2+3x$		-	0	+	|	+	0	-	
$h(x)$		+	0	-	‖	+	0	-	

■ $i(x)=3-\ln(2x+1)$ $\;\text{sur}\;\; I=]-\frac{1}{2};+\infty]$: résolvons directement une inéquation.

$3-\ln(2x+1)\le0\Leftrightarrow 3\le\ln(2x+1)\Leftrightarrow e^3\le 2x+1\Leftrightarrow x\ge\frac{e^3-1}{2}$:
on obtient ainsi le tableau ci-contre :

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{e^3-1}{2}$		$+\infty$
$i(x)$		+	0	-	

CORRIGÉ EXO 4

■ $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ est définie lorsque $\begin{cases} \ln x \ est\ définie \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ càd $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$: $D_f = \mathbb{R}_*^+ \backslash \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

■ $h(x) = \ln(\ln x + 2)$ est définie lorsque $\begin{cases} \ln x + 2\ est\ définie \\ \ln x + 2 > 0 \end{cases}$ càd pour $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > -2 \end{cases}$ càd $\begin{cases} x > 0 \\ x > e^{-2} \end{cases}$
Ainsi $D_h =]e^{-2};+\infty[$.

■ $i(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$ est définie lorsque $x^2 + x - 6 > 0$: $x \to x^2 + x - 6$ est un trinôme de racines 2 et -3 donc d'après les résultats sur les trinômes on a $x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$ d'où $D_i =]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$.

■ $j(x) = \ln(e^x - x)$ est définie lorsque $e^x - x > 0$: il n'y a pas grand chose à faire si ce n'est étudier la fonction $k(x) = e^x - x$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $k'(x) = e^x - 1$: le signe de cette fonction est facile à déterminer, en effet $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	
$k(x)$	…	$\searrow$	0	$\nearrow$	…

k est donc minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ donc toujours positive : de plus son unique 0 est obtenu en 0. Ainsi $D_j = \mathbb{R}^*$.

Attention : l'argument « l'exponentielle est plus forte que x donc $e^x - x \geq 0$ » est complètement faux. Cet argument de croissances comparées permet d'obtenir des résultats sur les limites en **l'infini**, pas plus (par exemple pour $x = -1$, $e^x \leq x$).

■ $k(x) = \sqrt{3x - xe^x}$ est définie lorsque $3x - xe^x \geq 0$.
Attention, il ne faut pas simplifier par x (on ne connaît pas son signe), mais factoriser par x.

Ainsi, $3x - xe^x = x(3 - e^x)$: reste à déterminer le signe de la fonction $x \to 3 - e^x$.
On a $3 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \ln 3$ par croissance de la fonction ln.
On peut alors dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
x		-	0	+	|	+	
$3 - e^x$		+	|	+	0	-	
$3x - xe^x$		-	0	+	0	-	

Ainsi, $D_g = [0;\ln 3]$

CORRIGÉ EXO 5

■ $f(x) = 3 - \frac{2-x}{3-x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$. De plus, $f(x) = \frac{3(3-x)}{3-x} - \frac{2-x}{3-x} = \frac{3(3-x)-(2-x)}{3-x} = \frac{7-2x}{3-x}$.
Ainsi,

x	$-\infty$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$7 - 2x$		+	|	+	0	-	
$3 - x$		+	0	-	|	-	
$f(x)$		+	||	-	0	+	

■ $g(x) = 2x^2 + \frac{3}{e^x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $e^x + 1 > 0$ pour tout réel x.

Par ailleurs, pour tout réel x on a $2x^2 \geq 0$ et $\frac{3}{e^x+1} > 0$ donc g est (strictement) positive sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux nombres positifs.

■ $h(x) = \frac{x \ln x +}{x+2}$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ et on a $h(x) = \frac{x \ln x + x}{x+2} = \frac{x(\ln x + 1)}{x+2}$.
Comme $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$, on obtient :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
x		+	|	+	
$\ln x + 1$		-	0	+	
$x + 2$		+	|	+	
$h(x)$		-	0	+	

■ $i(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $t \to e^{t^2}$ est continue donc on peut l'intégrer sur tout intervalle de bornes 1 et x.

- Pour $x \geq 1$, $e^{t^2} \geq 0$ sur $[1; x]$, les bornes sont rangées dans le « bon ordre » donc par positivité de l'intégrale $i(x) \geq 0$
- Pour $x \leq 1$, $e^{t^2} \geq 0$ sur $[x; 1]$, les bornes sont rangées dans le « l'ordre inverse» donc par positivité de l'intégrale $i(x) \leq 0$

<u>Remarque</u> : inutile donc de cherche une primitive de $t \to e^{t^2}$, d'ailleurs, ce n'est pas possible !

■ $j_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$: or $x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$ donc $j_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$

■ $k_n(x) = e^{nx} - 2$: $e^{nx} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{nx} \geq 2 \Leftrightarrow nx \geq \ln 2$ par croissance de la fonction exponentielle, et comme $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient : $g_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\ln 2}{n}; +\infty[$

■ $m(x) = \ln(2x+3) - 2$ (domaine $I =]-\frac{3}{2}; +\infty[$) :
$m(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x+3) \geq 2 \Leftrightarrow 2x + 3 \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq \frac{e^2-3}{2}$

CORRIGÉ EXO 6

■ $f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

<u>Variations</u> : f, fonction rationnelle, est dérivable sur son domaine et $f'(x) = \ldots = \frac{x+5}{(x+1)^3}$

Comme $(x+1)^3$ est du signe de $(x+1)$, $f'(x)$ a le signe de $\frac{x+5}{x+1}$ soit encore le signe du trinôme $(x+5)(x+1)$ (astuce pour aller plus vite et éviter de faire des lignes de plus dans le tableau de signes)

D'après la règle du signe du trinôme :

x		-5		-1	
f'(x)	+	0	-	||	+

<u>En terme de limites</u> :

- En l'infini, la fonction rationnelle f a même limite que celle du quotient de ses monômes de plus haut degrés, ici $\frac{x^2}{x^2} = 1$. Ainsi $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.
- Au voisinage de -1 : qu'on soit à gauche ou à droite de -1 on a $\lim_{x \to -1} (x+1)^2 = 0^+$.

En -1, le numérateur vaut -2 donc par quotient, $\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = -\infty$.

On a donc :

x	0		-5		-1		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$9/8$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

■ $g(x)=x+\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$

<u>Domaine</u> : g est définie quand $\dfrac{x}{2x+1}>0$ càd sur $]-\infty;-1/2[\cup]0;+\infty[$.

On étudie cependant g sur I = $]0;+\infty[$, d'après l'énoncé.

<u>Limites</u>

- Au voisinage de 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2x+1}=0^+$, et comme $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln(X)=-\infty$, la fonction g tend vers $-\infty$ en 0^+.
- Au voisinage de $+\infty$: en l'infini, une fonction rationnelle a même limite que celle du quotient de ses monômes de plus haut degré donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ donc g tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

<u>Variations de g sur I.</u>

g est dérivable et on a : $\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)'=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ donc $g'(x)=1+\left(\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)\right)'=1+\dfrac{1/(2x+1)^2}{x/(2x+1)}=1+\dfrac{1}{x(2x+1)}$.

Sur l'intervalle considéré on a $x>0$ donc $x(2x+1)>0$ et par conséquent $g'(x)>0$ et g est une fonction strictement croissante sur I.

■ $h(x)=\frac{e^x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

<u>Limites</u>

- on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (résultat de croissance comparée en l'infini)
- quand $x\to-\infty$, $e^x\to 0$ par quotient donc $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ (pas de FI)
- quand $x\to 0^-$, $e^x\to 1$ par quotient donc $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=-\infty$ (pas de FI)
- quand $x\to 0^+$, $e^x\to 1$ par quotient donc $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=+\infty$ (pas de FI)

<u>Variations de h.</u>

On a $h'(x)=\dfrac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$:
de plus, sur $\mathbb{R}^*$, $x^2>0$ et $e^x>0$ donc $h'(x)$ a le signe de $x-1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
h	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

■ $i(x)=xe^x-e^x+1$ sur $\mathbb{R}^+$

<u>Limite :</u>

vu que $i(x)=e^x(x-1)+1$, quand $x\to+\infty$: $e^x\to+\infty$ et $(x-1)\to+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}i(x)=+\infty$

Variations :

i est dérivable sur son domaine et on a $i'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Sur [0 ; +∞[, $xe^x \geq 0$ donc $i'(x) \geq 0$ ce qui prouve que i est strictement croissante sur [0 ; +∞[

x	0	$+\infty$
$i(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

■ $k(x) = x\ln x$: cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$, dérivable sur cet intervalle.

On a $k'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$: de plus, $k'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-1}$ par croissance de la fonction exponentielle.

- Limite en 0 : c'est un résultat de croissances comparées du cours, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$
- Limite en $+\infty$: par produit de limites, on obtient directement $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
k'		-	0	+	
k	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

CORRIGÉ EXO 7

Déterminer les quatre premiers termes des suites suivantes :

$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - n \\ u_0 = 2 \end{cases}$:

pour $n = 0$: $u_1 = u_0 - 0 = 2$

pour $n = 1$: $u_2 = u_1 - 1 = 1$

pour $n = 2$: $u_3 = u_2 - 2 = -1$

$\begin{cases} v_{n+1} = (n+1)v_n \\ v_0 = 1 \end{cases}$:

pour $n = 0$: $v_1 = 1 \times v_0 = 1$

pour $n = 1$: $v_2 = 2v_1 = 2$

pour $n = 2$: $v_3 = 3v_2 = 6$

$\begin{cases} w_{n+2} = w_{n+1} - w_n \\ w_0 = w_1 = 1 \end{cases}$:

pour $n = 0$: $w_2 = w_1 - w_0 = 0$

pour $n = 1$: $w_3 = w_2 - w_1 = 0 - 1 = -1$

(pour $n = 2$: $w_4 = w_3 - w_2 = -1 - 0 = -1$)

$\begin{cases} t_{n+2} = -n\, t_n \\ t_0 = 0, \quad t_1 = 1 \end{cases}$:

pour $n = 0$: $t_2 = -0t_0 = 0$

pour $n = 1$: $t_3 = -1t_1 = -1$

(pour $n = 2$: $t_4 = -2t_2 = 0$)

CORRIGÉ EXO 8

> **Astuce** : on peut passer par l'étude des variations de f pour étudier les variations de u_n.
> **Attention** : « f croissante » n'implique pas « (u_n) croissante »

1a. Le calcul des premiers termes nous suggère que la suite est croissante.
1b. Soit P(n) la proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ »

- $u_0 = 1$ et $u_1 = 4/3$ donc P(0) est vraie
- Supposons P(n) vraie au rang n cad supposons que $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain rang.

La fonction affine $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ étant croissante (coef. directeur positif), elle conserve le sens des inégalités et en l'appliquant à l'inégalité précédente,
on trouve $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ cad $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
On vient donc de prouver l'hérédité, donc la suite est bien croissante.

2. Soit P(n) la proposition « $u_n \leq 6$ »

- $u_0 = 1$ donc P(0) est vraie
- Supposons P(n) vraie au rang n cad supposons que $u_n \leq 6$ pour un certain rang.

f étant croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient encore $f(u_n) \leq f(6)$ cad $u_{n+1} \leq 3 \leq 6$.
On vient donc de prouver l'hérédité, donc la suite est bien majorée par 6.

3. D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge (elle est croissante majorée).
Notons L cette limite.
Les opérations sur les limites (variante ici du théorème du point fixe) donnent alors :
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}u_n+1\right)=\frac{1}{3}L+1$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$,
on obtient que $\frac{1}{3}L+1=L \Leftrightarrow \frac{2}{3}L=1 \Leftrightarrow L=\frac{3}{2}$.
La suite converge donc vers 3/2.

> **Attention** : le <u>théorème de convergence monotone</u> ne donne pas la limite de u_n (ce n'est pas formcément le majorant de l'énoncé).
>
> Cette limite se construit souvent à l'aide du <u>théorème du point fixe</u>, une fois la convergence établie.

4. Algorithme à programmer :

Affecter 0 à N
Affecter 1 à u
Tant que | u – 3/2 |> 0,001
    Affecter u/3 + 1 à u
    Affecter N+1 à N
Fin Tant que
Afficher N

Le rang trouvé est N = 6.

CORRIGÉ EXO 9

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 0.8u_n + 1$ et $u_0 = 6$.
1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0.8u_n - 4 = 0.8\left(u_n - \frac{4}{0.8}\right) = 0.8v_n$.
Cette suite est donc géométrique de raison 0.8 et de premier terme $v_0 = 6 - 5 = 1$
2. Ainsi $v_n = v_0\, q^n = 0.8^n$ et donc $u_n = v_n + 5 = 0.8^n + 5$
3. Comme $-1 < 0.8 < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.8^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

4. Par linéarité, décomposons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ puisque $u_n = 0.8^n + 5$

- $\sum_{k=0}^{n} 5 = 5(n+1)$
- $\sum_{k=0}^{n} 0.8^n = \frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8} = 5(1 - 0.8^{n+1})$

Ainsi, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n = 5(n+1) + 5(1 - 0.8^{n+1})$.

CORRIGÉ EXO 10

1. Pour étudier les variations d'une fonction, on dérive la fonction puis on étudie le signe de la dérivée.

1. $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$.

x^2 est toujours strictement positif sur $]0\,;+\infty[$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x^2 - 2$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $x^2 - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$.

Donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $]0\,;\sqrt{2}]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

f est donc décroissante sur $]0\,;\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

2. a. L'inégalité est à établir pour tout entier naturel non nul et la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence. Il faut donc utiliser un raisonnement par récurrence. Pour cela, on commence par identifier la proposition à établir. Puis on initialise le raisonnement, on écrit l'hypothèse de récurrence et on montre que la proposition est héréditaire. On termine en concluant.

→ Savoir-faire 1, p. 13

2. a. P(n) : « $u_n \geqslant \sqrt{2}$ » pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation**

$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 4\right) = \frac{9}{4} = 2{,}25$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}41$,

donc $u_1 \geqslant \sqrt{2}$. D'où P(1) est vraie.

- **Hérédité**

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier p tel que P(p) soit vraie, c'est-à-dire tel que $u_p \geqslant \sqrt{2}$.

Montrons que P(p + 1) est vraie, c'est-à-dire que $u_{p+1} \geqslant \sqrt{2}$.

$u_{p+1} = f(u_p)$, $u_p \geqslant \sqrt{2}$ et f est croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$,

donc $u_{p+1} \geqslant f(\sqrt{2})$.

Or $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, donc $u_{p+1} \geqslant \sqrt{2}$. D'où P($p$ + 1) est vraie.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 1 et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout entier naturel n non nul.

b. Pour établir que $f(x) \leqslant x$, on étudie le signe de la différence $f(x) - x$.

c. Deux raisonnements seraient possibles si la question ne débutait pas par « en déduire » : un raisonnement par récurrence ou une étude du signe de $u_{n+1} - u_n$. Ici il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ afin d'exploiter la question précédente.

d. Pour prouver que la suite converge, on utilise le théorème de convergence des suites décroissantes minorées.

→ Savoir-faire 9, p. 21

b. $f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x} - 2x\right) = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2+2}{x}\right)$.

Pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $-x^2 + 2 \leqslant 0$ et $x > 0$.

Donc pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) - x \leqslant 0$.

D'où pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout n non nul et pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1.

d. (u_n) est une suite décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{2}$. Donc la suite converge.

CORRIGÉ EXO 11

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+1}$ et $u_0 = 1$.

***1.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $1 \leq u_n \leq 2$.*

Soit P(n) la proposition « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

- $1 \leq 1 \leq 2$ donc P(0) est vraie
- Supposons qu'à un certain rang n on ait $1 \leq u_n \leq 2$, alors $3 \leq 2u_n + 1 \leq 5$ et par croissance de la fonction inverse sur [3 ;5] on a : $\boldsymbol{\frac{1}{5} \leq \frac{1}{2u_n+1} \leq \frac{1}{3}}$.

  Comme $\boldsymbol{5 \leq 5u_n \leq 10}$, en multipliant membre à membre (tout est positif), on obtient : $1 \leq \frac{5u_n}{2u_n+1} \leq \frac{10}{3}$: il y a un problème, $\frac{10}{3}$ est supérieur à 2 **<u>donc on ne peut pas conclure</u>**…
- Il va donc falloir se passer du travail sur les inégalités, et étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{5x}{2x+1}$: un tableau de variation nous permet de vérifier immédiatement que f est croissante sur [1 ;2] .

  Reprenons l'hérédité : supposons qu'à un certain rang n on ait $1 \leq u_n \leq 2$: la fonction f est croissante sur cet intervalle donc elle conserve le sens des inégalités et on a , $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ cad $\frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$.

  Or $1 \leq \frac{5}{3}$ donc on a bien $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

- L'hérédité est prouvée, la proposition est donc vraie pour tout entier n.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Remarque : Lorsque f est croissante, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est forcément **monotone**.

Méthode 1 :
Soit P(n) la proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

- $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5}{3}$ donc P(0) est vraie.
- Supposons qu'à un certain rang n on ait $u_n \leq u_{n+1}$: on sait que tous les termes de la suite sont sur l'intervalle [1 ;2] et f étant croissante sur cet intervalle on en déduit que $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ cad $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
- L'hérédité est prouvée, la proposition est donc vraie pour tout entier n.

Méthode 2 :
Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{5u_n}{2u_n+1} - \frac{u_n(2u_n+1)}{2u_n+1} = \frac{-2u_n^2+4u_n}{2u_n+1} = \frac{2u_n(2-u_n)}{2u_n+1}$

Or d'après Q1, $u_n \geq 1$ donc u_n positif de même que $2u_n + 1$; $u_n \leq 2$ donc $2 - u_n$ positif.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ est positif comme quotient de positif et la suite (u_n) est croissante.

3. Pour tout entier n on pose $v_n = \frac{u_n-2}{u_n}$.

3a. Calculer v_0 puis v_1. On a $v_0 = \frac{1-2}{1} = -1$ et $v_1 = \frac{5/3-2}{5/3} = -\frac{1}{5}$.

3b. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison. On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}} = \frac{\frac{5u_n}{2u_n+1}-2}{\frac{5u_n}{2u_n+1}} = \frac{\frac{u_n-2}{2u_n+1}}{\frac{5u_n}{2u_n+1}} = \frac{u_n-2}{5u_n} = \frac{1}{5}\frac{u_n-2}{u_n} = \frac{1}{5}v_n$: cette suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

4a. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. D'après le cours, on a alors $v_n = -1\left(\frac{1}{5}\right)^n$ et comme $v_n = \frac{u_n-2}{u_n} \Leftrightarrow v_n u_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2 \Leftrightarrow u_n = -\frac{2}{v_n-1}$ (puisque la suite (v) est négative donc $v_n - 1$ ne s'annule pas).
Ainsi $u_n = -\frac{2}{v_n-1}$ et en remplaçant par $v_n = -1\left(\frac{1}{5}\right)^n$, on obtient u_n en fonction de n : $u_n = -\frac{2}{-1\left(\frac{1}{5}\right)^n-1} = \frac{2}{\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}$

4b. Pour tout entier n on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2}{u_k}$; exprimer S_n en fonction de n. Pour tout entier k on a donc $u_k = \left(\frac{1}{5}\right)^k + 1$:

- $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1-(1/5)^{n+1}}{1-1/5} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$
- $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{u_k} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) + n + 1$

CORRIGÉ EXO 12

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2 \end{cases}$. On pose $w_n = u_n - n - \frac{1}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et w_0, w_1, w_2.

- $u_1 = 0,\ u_2 = 5,\ u_3 = -2$
- $w_0 = \frac{2}{3},\ w_1 = -\frac{4}{3},\ w_2 = \frac{8}{3}$: w_n semble géométrique de raison -2.

1b. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher le terme u_N de la suite, N étant saisi par l'utilisateur :

Demander un entier N
Initialiser U à 1
De K =1 à K = N Faire
    Affecter -2*U+3*(K-1)+2 à la variable U
Fin Boucle
Afficher U

Explications : pour calculer u_1 il faut remplacer $n = 0$ dans l'expression $u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2$.
La boucle proposée qui commence à $K = 1$, permettra de calculer u_1 et on se rend compte que l'expression à laquelle vous avez certainement pensé (-2*U+3*K+2) ne convient pas.
Elle va nous retourner $-2 + 3 + 2 = 3$ au lieu de 0.
Il y a un décalage d'indices.

1c. Un élève décide de modifier l'algorithme précédente en faisant une boucle de K = 0 à K = N-1. Comment sera alors modifier l'affectation de U suivante ?
Dans ce cas-là par contre, l'affectation -2*U+3*K+2 à U conviendra.

2a. Prouver que w est géométrique

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - \frac{1}{3} = -2u_n + 3n + 2 - (n+1) - \frac{1}{3} \\ &= -2u_n + 2n + \frac{2}{3} = -2\left(u_n - n - \frac{1}{3}\right) = -2w_n \end{aligned}$$

w_n est donc bien géométrique de raison -2.

2b. Exprimer w_n en fonction de n.
Ainsi $w_n = w_0(-2)^n = \frac{2}{3}(-2)^n = \frac{(-2)^{n+1}}{3}$.

2c. En déduire u_n en fonction de n.
Vu que $w_n = u_n - n - \frac{1}{3}$ on en déduit que $u_n = \frac{(-2)^{n+1}}{3} + n + \frac{1}{3}$

3. Préciser la nature des suites w et u.

- La suite w est divergente (elle n'a pas de limite) puisque $-2 < -1$
- La suite u est elle aussi divergente (elle n'a pas de limite) puisque $n \underset{}{\overset{+\infty}{=}} o((-2)^n)$ et $(-2)^n$ n'a pas de limite.

4a. Exprimer $\sum_{k=0}^{k=n} w_k$ en fonction de n.
D'après la résultats sur les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique on a

$$\sum_{k=0}^{k=n} w_k = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{k=n}(-2)^k = \frac{2}{3} \times \frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} + 11 - (-2) = \frac{2}{9} \times (1 - 2^{n+1})$$

4b. En déduire $\sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n.
Vu que $u_n = w_n + n + \frac{1}{3}$, par linéarité de la somme on a

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} w_k + \sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times (1 - 2^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3}(n+1)$$

CORRIGÉ EXO 13

Sachant que $e \approx 2.7$, prouver que $\ln 2 - 0.5 > 0$, sans calculatrice bien sûr…
Notons $A = \ln 2 - 0.5$:

$A = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln e$ puisque $\ln e = 1$

$A = \ln 2 - \ln\sqrt{e}$ puisque $n \ln a = \ln(a^n)$ pour tout rationnelle n, et qu'on sait que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$A = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{e}}\right)$ puisque $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$

$A = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{e}}\right)$ puisque $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (même règle que pour les puissances)

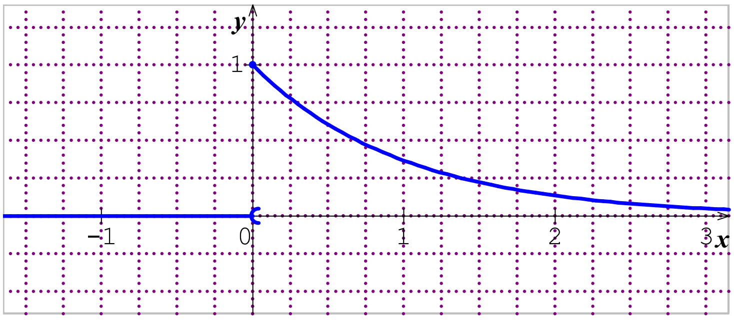
Enfin, $e \approx 2.7$ donc $\frac{4}{e} > 1$ et comme la fonction ln est croissante, on a bien $\ln\frac{4}{e} > \ln 1 = 0$.

CORRIGÉ EXO 14

Soit F la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & pour\ \ x < 0 \\ e^{-x} & pour\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement F.

- Pour $x < 0$, on trace la courbe représentant la fonction nulle, càd la droite d'équation $y = 0$
- Pour $x \geq 0$, on trace la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

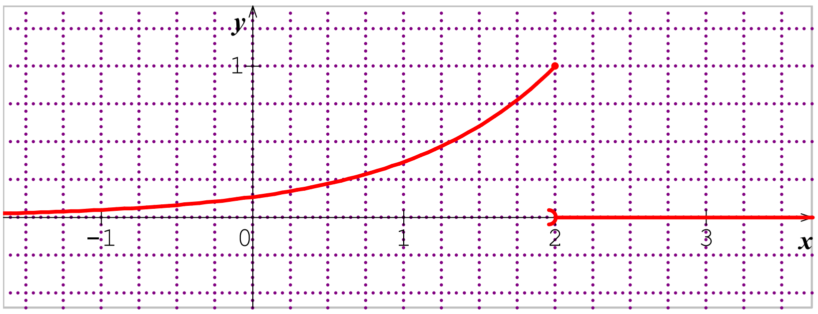


2. On pose $G(x) = F(2 - x)$, pour tout réel x.

2a. Déterminer une expression de $G(x)$ en fonction de x. L'expression de $F(x)$ est déterminée en fonction du signe de x ; pour trouver une expression de $F(2 - x)$ il nous faut donc connaitre le signe de $2 - x$.

- Si $x \leq 2$: alors $2 - x \geq 0$ et donc $G(x) = F(2 - x) = e^{-(2-x)} = \frac{e^x}{e^2}$
- Si $x > 2$: alors $2 - x < 0$ et donc $G(x) = F(2 - x) = 0$

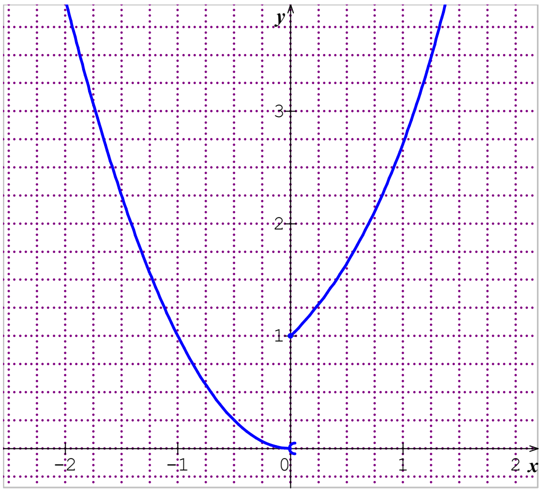
2b. Représenter graphiquement G.



CORRIGÉ EXO 15

Soit F la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} x^2 & pour\ \ x < 0 \\ e^x & pour\ \ x \geq 0 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement F. Sur $\mathbb{R}_*^-$, on trace la fonction carré, sur $\mathbb{R}^+$, on trace la fonction exponentielle. On obtient :



2. On pose $G(x) = F(2x+1)$, pour tout réel x.
Déterminer une expression de $G(x)$ en fonction de x

L'expression de $F(x)$ est déterminée en fonction du signe de x ; pour trouver une expression de $F(2x+1)$ il nous faut donc connaitre le signe de $2x+1$.

- Si $x \geq -\frac{1}{2}$: alors $2x+1 \geq 0$ et donc $G(x) = F(2x+1) = e^{2x+1}$
- Si $x < -\frac{1}{2}$: alors $2x+1 < 0$ et donc $G(x) = F(2x+1) = (2x+1)^2$

CORRIGÉ EXO 16

On considère la fonction f définie sur $]0;1]$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Déterminer la limite de f en 0. D'après le cours, par croissances comparées, $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$).

2. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;1]$.

f est dérivable sur $]0;1]$ et on a $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x$: ainsi,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \in [0;1]$$

x	0		e^{-1}		1
f	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

3. En déduire un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0;1]$. Grâce au tableau de variations, on peut affirmer que

$$\forall x \in [0;1], -e^{-1} \leq f(x) \leq 0$$

On a par conséquent :

$$\forall x \in [0;1], |f(x)| \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

4. Prouver que pour tout entier naturel n, on a $|(x\ln x)^n| \leq \frac{1}{e^n}$. D'après le 3, on sait que $|x\ln x| \leq \frac{1}{e}$.
Par ailleurs, on sait que $|x\ln x|^n = |(x\ln x)^n|$.
D'après le 3, on a donc

$$|x\ln x|^n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n \Leftrightarrow |(x\ln x)^n| \leq \frac{1}{e^n}$$

.

CORRIGÉ EXO 17

On pose $\mathcal{P}(n)$: "$2^n \geq n+1$".

- Initialisation de la récurrence : cas $n = 0$.
  $2^0 = 1 \geq 0 + 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain n ; on a donc $2^n \geq n+1$.
  Nous devons prouver que (pour ce n) $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^{n+1} \geq (n+1)+1 = n+2$.

  Mais $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc comme par hypothèse de récurrence, on a $2^n \geq n+1$ et que $2 \geq 0$, on obtient $2 \times 2^n \geq 2(n+1)$ soit $2^{n+1} \geq 2n+2$.
  Or $2n+2-(n+2) = n \geq 0$ donc $2n+2 \geq n+2$.
  Par conséquent $2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$, ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n positif.